令和６年　電験１種１次　電気理論
茂木嘉之が解く

よしゆき　/ Yoshiyuki Mogi

2024 年 9 月 14 日

第 1 章

電気理論　問 1

1.1　導体同芯球 ABC の電界と電荷と電位を考える

■ 問題概要

図 1.1 により
球殻 A にスイッチ S1 *1球殻 C にスイッチ S2 が取り付けてありともに接地極につながっている。
スイッチの状態及び、電荷 Q を球殻 B に与えた場合の諸元について考察する。

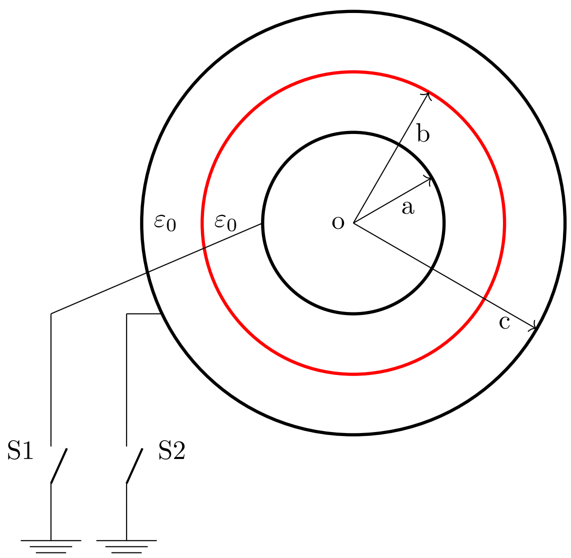

図 1.1　同芯導体球を考える

*1 接地装置という

1.2　(1)

■どんな問題

スイッチ S1,S2 開放で、球殻 B に電荷 Q を与えたときの、球殻 A の電位をもとめる。図 1.2 参照

$$V_1 = -\int_{\infty}^{a} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\Big[-\frac{1}{r}\Big]_a^{\infty} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\,[\mathrm{V}] \tag{1.1}$$

$$V_2 = -\int_{b}^{a} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\Big[-\frac{1}{r}\Big]_a^{b} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\Big(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\Big)\,[\mathrm{V}] \tag{1.2}$$

$$V_a = V_1 - V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\Big(\frac{1}{a}-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\Big) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b}\,[\mathrm{V}] \tag{1.3}$$

■手順とヒントや手がかり

球殻 A には、球殻 B 内面の-Q [C] の電荷の静電誘導により、+Q [C] の電荷が誘起する。
球殻 A 単独での、無限点 0 からの電位 V_1 をもとめ、次に、球殻 B 内面電荷-Q [C]　による影響を考慮すればどうだろうか。

■ 答え

$$V_a = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b}$$ [V] となる

1.3　(2)

■どんな問題

前問の条件で、球殻 A を接地した場合の電荷 Q_A を求める。

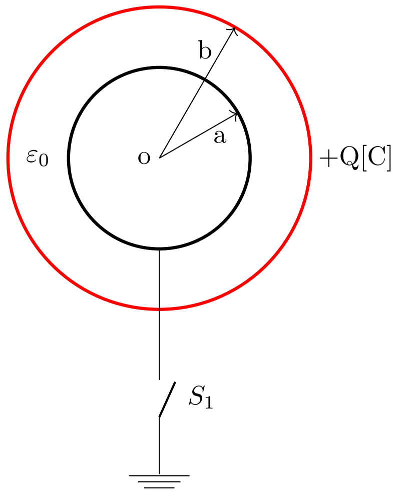

図 1.2　同芯導体球 A を接地する

■手順とヒントや手がかり

接地前の電位が、前問の

$$V_a = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

であるから、単独の球殻 A の表面に電荷 Q_A を与え、無限点 0 からの電位 V_{a1} を求める。
接地を施すと、すべての電位の和はゼロとなるであろうから
$V_a + V_{a1} = 0$
として求めてみよう。

■答え

$$V_{a1} = -\int_{\infty}^{a} \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^{\infty} = \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0 a}\,[\mathrm{V}] \tag{1.4}$$

$$V_a + V_{a1} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b} + \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0 a} = 0\,[\mathrm{V}] \tag{1.5}$$

$$Q_a = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 b}\left(4\pi\varepsilon_0 a\right) = -\frac{a}{b}\,Q\,[\mathrm{C}] \tag{1.6}$$

1.4　(3)

■どんな問題

前問の条件での球殻 B の無限点 からの電位 V_b を求める。

■手順とヒントや手がかり

球殻 B の表面には、前問での Q_a と $+Q$ の電荷が発生している。

■答え

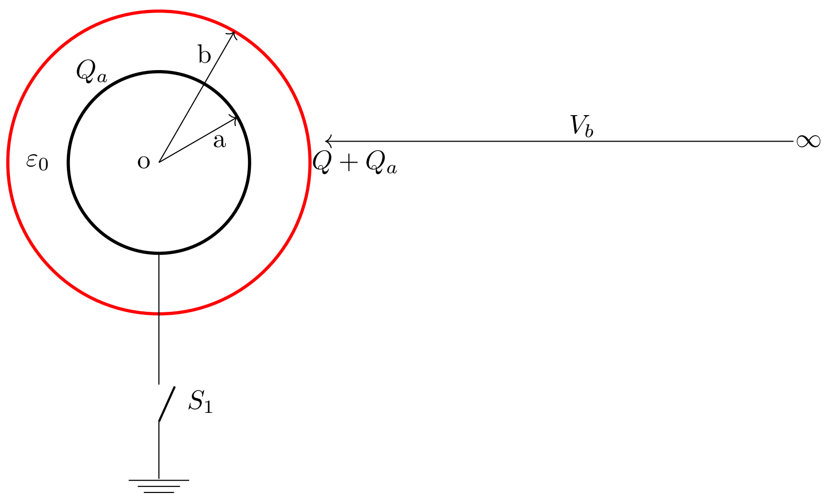

図 1.3　B の電位を考える

$$V_b = -\int_{\infty}^{b} \frac{Q+Q_a}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q+Q_a}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_b^{\infty} = \frac{Q+Q_a}{4\pi\varepsilon_0 b}\ [\mathrm{V}] \tag{1.7}$$

$$V_b = \frac{Q+Q_a}{4\pi\varepsilon_0 b} = \frac{(1-\frac{a}{b})Q}{4\pi\varepsilon_0 b} = \frac{(b-a)Q}{4\pi\varepsilon_0\, b^2}\ [\mathrm{V}] \tag{1.8}$$

1.5　(4)

■ どんな問題

球殻 B の　静電容量を求めよ。

■ 手順とヒントや手がかり

公式　$Q = CV$ から $C = \frac{Q}{V}$ と変形し、式 1.8 を代入するだけ

■答え

式 1.9 のとおり

$$C_b = \frac{Q}{V_b} = \frac{4\pi\varepsilon_0\, b^2}{(b-a)}\,[\mathrm{F}] \tag{1.9}$$

1.6　(5)

■どんな問題

内球 B に電荷 Q を与えたとき
開閉器 S_1 S_2 を閉じたときの、最外殻球 C の電荷 Q_c を求めよ。

■ 手順とヒントや手がかり

同芯球の中心から等距離のガウス球を考えると、
どうも電荷 Q_C 単独での計算ができない。
なぜならガウス球面と、外殻 C 内面が接触してしまうまで、ガウス球を膨らませないと電荷 Q_c に到達しない。
ガウス球で囲んだ内部電荷と誘電率からガウスの法則にもとづき電位を計算する。
これが、もっとも一般的なのだが
困りましたね。
C と A を接地開閉器で同電位としたのであれば、
内球 A の電荷 Q_a は、現在想定の電荷 Q_c と、どんな関係があるのか?
c-a 間の電位 V_{ca}
と
電荷 Q 及びそれから計算されべきの電位との関係はどうなっているのか
もうすこし、シンプルに考えられないのか、
図を書き換えられないのか。

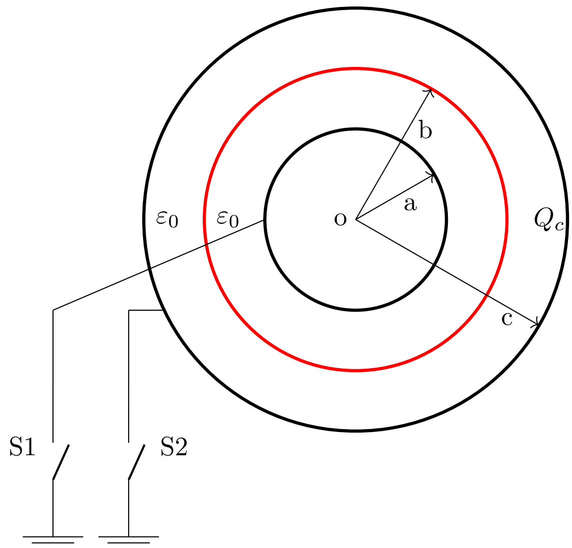

図 1.4　問題とおりの電荷配置

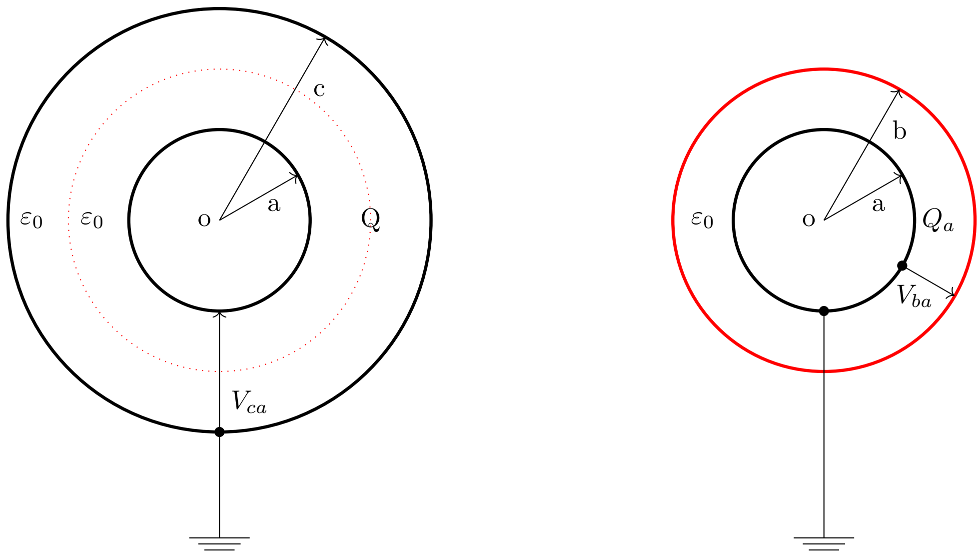

図 1.5　図を計算しやすく書き換えして考える

■こんな風に解いてみた

図 1.1 に電荷を記入し、本問の通り書き出してみると、図 1.4 となる。
この図を書き換えたのが図 1.5 となる。
ここで、図 1.5 の説明をする前に図 1.4 の説明が必要であろう。

■ 図 1.4 を見てほしい

接地電極は、0V であり外殻 C の電荷 Q_C は、接地装置 S_1, S_2 を通じて導体で接続されており
内殻球 A と同電位である。

■ 電荷 Q_c

ここで注意しなければいけないのは、電荷 Q_C は、外殻球 C の内面側の電位であり中間殻球 B の外面側電荷 Q と対峙している関係であると想定しているこだ。
つまり、外殻球 C の外表面には $-Q_C$ の電荷が発生していることになる。

■ガウス球で囲めない電荷 Q_c

さて、図 1.4 から、ガウス球を図の中心点から徐々に半径を大きくして、ふくらませてみよう。
外殻球 C 内面に至るまでガウス球という丸い球体を膨らませてみる。
しかし目的とする
電荷 Q_c にはいたらない。
つまり、電荷 Q_c がガウス球の外にあるのだから、電束が図れないのだから、電位は計算できず、困ってしまう。

■電荷の配置と図の書換え

図 1.1 に電荷を記入し、本問の通り書き出してみると、図 1.4 となる。この図を書き換えたのが図 1.5 となる。
ここで、図 1.5 の説明をしよう。接地電極は、0V であり外殻 C の電荷 Q_C は、接地装置 S_1, S_2 を通じて導体で接続されている。つまり、内殻球 A と外殻球 C は同電位である。

■ 接地開閉器とその両端の電極

先ほどの接地装置を通じて、外殻球 C の内面電荷 Q_C と、
内殻球 A の外面電荷 Q_a が電気的に接続されている。これは、最後に記した記事を見てもらえばわかるが一つの導体としてみなせる。

■ 図 1.5 の右図

V_{ba} を求めるための図である。
電界の強さは、球中心 o からのガウス球で囲み存在する電荷 Q_a から

$$E = \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,[V/m]$$

である。

■ 電荷 Q はどこに存在するのか

図 1.5 の左図は、B 表面に電荷 Q が存在しており、外殻球 C から外殻球 A までの電位 V_{ca} を求めるための図となる。

■ なぜ積分範囲が b から　a となるのか

図 1.5 の左図より、赤の点線が殻球 B である。いま、C 側に接地記号があるが
本計算では電荷 Q が体積 c-a の殻球の絶縁体においてその静電容量から幾何学的に計算できる電位をもとめるのである。

$$-\int_b^a E_1 dr + -\int_c^b E_2 dr$$

であるが、

$$E_1 \neq E_2$$

であり、a-b 間の電荷は殻球内面で $-Q - Q_a$ となる。
また、b-c 間の電荷として殻球外面で $Q - Q_c$ となる。
以上より合成して考察すべくも、その電界の強さを計算する根拠に未知数[*2] Q_c が含まれるのであるから不適なのである。

[*2] 本問で解くべき値

■ V_{ca} と V_{ba} の関係

図 1.5 の右図、左図より計算した電位
V_{ca} , V_{ba}
から、電荷 Q_a が容易に求まる。
$V_{ca} = V_{ba}$ とすればよいのだ。

■ 殻球 A 表面に電荷 Q_a が存在したときの a-b 間の電位 V_{ba}

式 1.10 より

$$V_{ba} = -\int_b^a \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b = \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)[\mathrm{V}] \tag{1.10}$$

■ 電極 A-C 間に電荷 Q が存在する場合の静電容量 C_{ca} で発生する電位

球空間の絶縁体 c-a 間の電位は式 1.11 となる。

$$V_{ca} = -\int_c^a \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^c = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)[\mathrm{V}] \tag{1.11}$$

■ 式 1.10 と式 1.11 から求める電荷は

式 1.12 より電荷 Q_a が求まる。

$$V_{ba} = V_{ca} \to Q_a\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) = Q\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right) \to Q_a = \frac{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)} = \frac{(b-a)c}{(c-a)b}Q\,[\mathrm{C}] \tag{1.12}$$

■ 答え

式 1.12 より求めるべき電荷 Q_c は、

$$-\frac{(b-a)c}{(c-a)b}Q\,[\mathrm{C}]$$

となる。

■ なぜなぜ

なぜ電荷 Q_a から電荷 Q_c が求まるのか。

■ 接地開閉器で接続されている電極 A と電極 C の関係は

導体であるから全体の電荷の和は変わらない。
片側が電荷 Q_a なら電荷 Q_c でその関係性は
$Q_a + Q_c = 0$
となる。

■ **なぜなぜ** 2

電位 V_{ba} と電位 V_{ca} が等しい理由は

A-C 間の静電容量 C_{ca} に電荷 Q を与えた時の電位が V_{ca} であるが、この電位は、球体のどこが最大値のこの値となるのか

両端を接地されているので当然電荷を与えた殻球 B がこの電位となる。

では、電位傾度はどうなるのか

B を最大として、A 及び C 側に近づくほど小さくなる。

つまり、

A から B までの上り坂と[*3]C から B までの上り坂がある

B 山に

A 側からトライしたということだ。

[*3] 1.6 ページの積分範囲を参照

1.7　最後に

■無視した導体球殻 B

中殻 B について、
(5) での電位 V_{ca} を求めるときに無視して考えていた。[*4]それで良いのか?
という疑問に答えてみたい。

■B と A の間を考えよう。

まず、殻球 B 内面の導体側には
$-Q$ [*5]
の電荷の偏りができる。[*6]
内面には、
最接触している絶縁体の分子の電荷が導体内面側の電荷の偏りと相対となる極に偏る。
これらを説明するために絶縁体分子の電荷の偏りを (- +) と表す。
この場合は、左側には、電子が集まりやすく右側が、電子が疎のため、プラス電荷成分がかたよっている。

■ この偏りによる

電荷により絶縁体分子のと反対極性の電荷が集まることになる。
そして、その導体の外面には、内面に集まった電荷のため、その電荷成分が疎となるから、内面と反対極性の電荷となり、外面接触の絶縁体には、導体外面の反対極性の電荷が偏る。

■ 図示すれば

(- +) (- +) を絶縁体分子の双極子ダイポールとすれば
絶縁体は、
(- +)(- +)(- +)(- +)(- +)(- +)
となっている。
金属体では　金属体の途中では電荷の偏りはない。それは自由電子による極性の中和反応とでもいえばよいのだろうか、とにかく表面にだけ偏る
[++.......–]
のような電気的性質となっている。
もうおわかりだろう、
電荷 +Q が存在し、絶縁体で囲まれていて、
その絶縁体の端部に金属体がありその金属体の、外部絶縁体を模試してみると

[*4] 図 1.5 左　赤の点線
[*5] 殻球に電荷 Q を与えるとは、殻球 B 外面に電荷 +Q が存在すると理解する
[*6] 自由電子と分子の負極性が集まる

+Q (- +)(- +) (- +)(- +) (- +)(- +) [–.....++] (- +)(- +)(- +)

■ ここで金属体を除去してみると

+Q (- +)(- +)(- +)(- +)(- +)(- +) .....(- +)(- +)(- +)
どちらも、最遠点での電荷の極性はかわらない。
では、なにが違うのか。
ε_s である絶縁性能をしめす物質では、それぞれの固有の ε_s を持つ、この違いが、分子ダイポールの結合力の違いとなる。

■ 結合力は、誘電率

簡単に言えば、エネルギー源から減衰せずに伝えられるか、減衰してしまうか。である。
この考えはとても大切で、無限遠点を考察すれば、単球の静電容量が求められるということを言っている。かたや、減衰しにくいといえども、最遠点では、宇宙の果てより遠い点に至れば、減衰し 0 となると言っている。

■ 接地の効用

ここで、接地であるが、接地の効用は、蓄積された電荷の偏りを、もの自由性のあるものに変えると理解し、あたかも、最遠点に至らずも、電気的偏りを、自由化させるべくする機能を持つものである。

■ 地球という球体表面に存在するものは

私たち人間は、この地球という球体で大地が、金属体とほぼ同様の性質をもつ表層をしている大地に暮らしている。
あたかも、
本問の球殻の表面の電荷のように、ちっぽけな人間として存在しているにすぎない。

■ なにか偏っているのでは

現代に必要なことは、地球表面を接地装置により、最遠点のゼロ電位の点に接地させ
表面の偏った電荷達を、
自由性をもつ電荷として、存在させるような気がしてきた。
国際政治的な接地装置が必要なのかもしれんが、
肝心なことは、
そのスイッチのキーを握る
一握 (人悪) の輩(やから)がまた、ある種の偏りをつくるのであろう。
紀元前の孔子の時代の悩みが、2024 年の現代でも風化せずに同化したなやみとして捉えられるということは、まさに、数万年もかかるのではと思われることであろう。
目の前の計算式や結論だけで終わってはいけない。そんな気がしてきた。

よしゆき